ФГОС

Ю. В. Садовничий

ПРОМЕЖУТОЧНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ

9 класс

ГЕОМЕТРИЯ

НОВАЯ ФОРМА АТТЕСТАЦИИ УЧАЩИХСЯ

- ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ
- 15 ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ
- ЗАДАНИЯ КО ВСЕМ ТЕМАМ КУРСА
- ОТВЕТЫ

Ю. В. Садовничий

ПРОМЕЖУТОЧНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ

ГЕОМЕТРИЯ

9 класс

- ☑ *Итоговый контроль знаний учащихся*
- ☑ *15 вариантов заданий*
- ☑ *Задания ко всем темам курса*
- ☑ *Ответы*

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2015

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
С14

Садовничий Ю. В.

С14 Промежуточное тестирование. Геометрия. 9 класс. ФГОС / Ю. В. Садовничий. — М. : Издательство «Экзамен», 2015. — 78, [2] с. (Серия «Промежуточное тестирование»)

ISBN 978-5-377-08187-6

Данное пособие полностью соответствует федеральному государственному образовательному стандарту (второго поколения).

Книга содержит сборник итоговых тестов по геометрии для учащихся 9-го класса.

Предложенные задания полностью соответствуют школьной программе. Каждый тест можно рассматривать как итоговую контрольную работу, охватывающую весь материал учебника по геометрии для 9-го класса.

Пособие будет полезно учащимся 9-х классов средних школ для контроля знаний и для подготовки к ОГЭ, а также учителям математики для работы со школьниками.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

Подписано в печать 25.07.2014. Формат 70х108/16.
Гарнитура «Школьная». Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 1,93.
Усл. печ. л. 7,0. Тираж 7 000 экз. Заказ № 2575.

ISBN 978-5-377-08187-6

Содержание

Введение

Данная книга содержит 15 итоговых тестов по геометрии для учащихся 9-х классов средних школ. Каждый тест состоит из 14 задач. В задачах 1–11 нужно получить ответ, а затем выбрать из приведенных ответов тот, который совпадает с полученным. Задача 12 — это задача на доказательство каких-либо теорем или фактов, задача 13 — задача на нахождение геометрических мест точек, задача 14 — задача на построение. Тесты 1, 6 и 11 снабжены краткими решениями, остальные тесты — ответами.

Среди задач встречаются как простые, требующие только знания соответствующих определений и теорем, так и сложные, при решении которых необходима какая-то нестандартная идея. В целом предложенные в данном пособии задания полностью соответствуют школьной программе. Каждый тест можно рассматривать как итоговую контрольную работу, охватывающую весь материал учебника по геометрии для 9-го класса.

При работе над книгой автор использовал материалы, предложенные в учебнике по геометрии для 9-го класса Л.С. Атанасян и др. Данное пособие будет полезно учащимся 9-х классов средних школ для контроля знаний, учащимся старших классов для повторения материала, а также учителям математики для работы со школьниками.

Желаем успехов!

ТЕСТ 1

1. Упростите выражение $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{KP}$.

   1) $\overrightarrow{PM}$
   2) $\overrightarrow{AK}$
   3) $\vec{0}$
   4) $\overrightarrow{PK}$
   5) выражение не приводится к более простому виду

2. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(-2,1)$, $B(1,3)$, $C(4,0)$. Найдите координаты четвертой его вершины D.

   1) $(2,-1)$
   2) $(2,1)$
   3) $(1,-2)$
   4) $(-1,2)$
   5) другой ответ

3. Центр окружности, которая задана на координатной плоскости уравнением $x^2+y^2+x=0$, находится в точке

   1) $(0,0)$
   2) $(-1,0)$
   3) $(0,-1)$
   4) $\left(-\frac{1}{2},0\right)$
   5) другой ответ

4. Дан треугольник ABC: $A(-2,3)$, $B(4,1)$, $C(6,-5)$. Составьте уравнение прямой, содержащей медиану этого треугольника, проведенную из вершины A.

   1) $7x-5y+11=0$
   2) $5x+7y-11=0$
   3) $5x-y+13=0$
   4) $5x-7y-11=0$
   5) другой ответ

5. В треугольнике ABC длина стороны AC равна 5, сумма длин двух других сторон равна 7, косинус угла BAC равен 4/5. Найдите площадь треугольника ABC.

1) 3
2) 4
3) 5
4) 6
5) другой ответ

6. Дан равносторонний треугольник, длины сторон которого равны 1. Вычислите $\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}+\overline{CA}\cdot\overline{AB}$.

1) 1
2) −1
3) 3/2
4) −3/2
5) другой ответ

7. Найдите периметр правильного многоугольника, если длина его стороны равна 1, а градусная мера угла равна 144°.

1) 8
2) 10
3) 12
4) 15
5) такого правильного многоугольника не существует

8. Вне прямого угла с вершиной C, на продолжении его биссектрисы взята точка O так, что $OC=\sqrt{2}$. С центром в точке O построена окружность радиуса 2. Эта окружность пересекает стороны угла в точках A и B. Найдите площадь сектора OAB, содержащего точку C.

1) $\frac{\pi}{3}$
2) $\frac{2\pi}{3}$
3) $\frac{4\pi}{3}$
4) π
5) другой ответ

9. При симметрии относительно точки $M(1,1)$ прямая $3x-2y-1=0$ отображается на прямую

1) $3x+2y-1=0$
2) $3x-2y+1=0$
3) $3x-2y-1=0$
4) $2x-3y-1=0$
5) другой ответ

10. Правильный треугольник ABC со стороной, равной 3, вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причем длина хорды AD равна $\sqrt{3}$. Найдите сумму длин хорд BD и CD.

1) 3
2) $2\sqrt{3}$
3) $3\sqrt{3}$
4) $4\sqrt{3}$
5) другой ответ

11. Точка C делит хорду AB окружности радиуса 6 на отрезки $AC=4$ и $CB=5$. Найдите минимальное из расстояний от точки C до точек окружности.

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4
5) другой ответ

12. Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что для произвольной точки M плоскости справедливо равенство $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$.

13. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место всех точек M, для каждой из которых $2AM^2-BM^2=2AB^2$.

14. Дан угол и точка внутри этого угла. Через данную точку проведите прямую, отрезок которой, заключенный между сторонами угла, делится этой точкой пополам.

ТЕСТ 2

1. Длина вектора $\vec{a}$ равна 3, а длина вектора $\vec{b}$ равна 8. Сколько целых значений может принимать длина вектора $(\vec{a}+\vec{b})$?

1) 8
2) 7
3) 6
4) 2
5) другой ответ

2. Даны две смежные вершины $A(-1,3)$ и $B(2,1)$ параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты его вершины D, если известно, что диагональ AC параллельна оси Oy, а диагональ BD параллельна оси Ox.

1) $(-1,-1)$
2) $(-4,-1)$
3) $(1,-1)$
4) $(-4,1)$
5) другой ответ

3. Найдите радиус окружности, которая задается на координатной плоскости уравнением $x^2+y^2+3y=0$.

1) 1
2) $3/2$
3) 2
4) $5/2$
5) другой ответ

4. Дан треугольник ABC: $A(4,4)$, $B(-6,-1)$, $C(-2,-4)$. Составьте уравнение прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла треугольника при вершине C.

1) $7x+y+18=0$
2) $2x+y+8=0$
3) $5x+2y+18=0$
4) $7x-y+18=0$
5) другой ответ

5. В трапеции $PQRS$ длина основания QR равна 3, длина диагонали QS равна 5, а величина угла QSP равна 30°. Найдите длину стороны RS.

1) 4
2) $\sqrt{34-15\sqrt{3}}$
3) $2\sqrt{3}+1$
4) $\sqrt{29-12\sqrt{3}}$
5) другой ответ

6. В треугольнике ABC даны длины его сторон: $AB=7$, $BC=5$ и $CA=6$. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.

1) 19
2) −19
3) 14
4) −7
5) другой ответ

7. В окружность вписан правильный восьмидесятиугольник. Сумма длин всех его диагоналей, имеющих наименьшую длину, равна 80. Найдите сторону правильного сорокаугольника, вписанного в эту же окружность.

1) 1
2) 2
3) 3
4) 0.5
5) другой ответ

8. В прямоугольном треугольнике длина одного из катетов равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других его сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найдите длину гипотенузы этого треугольника.

1) $\sqrt{\dfrac{2}{4+\pi}}$
2) $\sqrt{\dfrac{2}{4-\pi}}$
3) $\sqrt{\dfrac{1}{3+2\pi}}$
4) $\sqrt{2+4\pi}$
5) другой ответ

9. При симметрии относительно оси абсцисс прямая $3x+2y=7$ отображается на прямую

1) $3x+2y=-7$
2) $3x-2y=-7$
3) $2x-3y=7$
4) $3x-2y=7$
5) другой ответ

10. Дан треугольник ABC, в котором угол B равен 30°, $AB=4$ см и $BC=6$ см. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Определите площадь треугольника ABD.

1) 2 см^2
2) 2.4 см^2
3) 2.7 см^2
4) 3 см^2
5) другой ответ

11. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB=14$, $BC=6$, $AC=10$. Биссектрисы BD и CE пересекаются в точке O. Найдите OD.

1) 2
2) $\sqrt{5}$
3) $\sqrt{6}$
4) $\sqrt{7}$
5) другой ответ

12. Докажите, что медиану AA_1 треугольника ABC можно вычислить по формуле $AA_1=\frac{1}{2}\sqrt{2AC^2+2AB^2-BC^2}$.

13. Дана прямая a и точка A, не лежащая на ней. Для каждой точки M_1 прямой a на луче AM_1 взята точка M такая, что $AM_1 \cdot AM=k$, где k — данное положительное число. Найдите геометрическое место всех таких точек M.

14. Постройте правильный восьмиугольник, сторона которого равна данному отрезку.

ТЕСТ 3

1. Длина вектора $\vec{a}$ равна 5, длина вектора $\vec{b}$ равна 7, а длина вектора $(\vec{a}-\vec{b})$ равна 12. Найдите длину вектора $(\bar{a}+\bar{b})$.

1) 1
2) 2
3) 10
4) 12
5) невозможно определить однозначно

2. Даны две точки $A(-3,1)$ и $B(2,-3)$. На прямой AB найдите точку M так, чтобы она была расположена по ту же сторону от точки A, что и точка B, и чтобы отрезок AM был втрое больше отрезка AB.

1) (12,–11)
2) (11,–12)
3) (11,–10)
4) (10,–11)
5) другой ответ

3. Окружность с центром в точке $O(2,-3)$ и радиусом 5 задается на координатной плоскости уравнением

1) $(x+2)^2+(y-3)^2=5$
2) $(x-2)^2+(y+3)^2=5$
3) $(x+2)^2+(y-3)^2=25$
4) $(x-2)^2+(y+3)^2=25$
5) другой ответ

4. Дан треугольник ABC: $A(-1,2)$, $B(3,-1)$, $C(0,4)$. Составьте уравнение прямой, проходящей через вершину A и параллельной стороне BC.

1) $2x+5y-8=0$
2) $x+4y-7=0$
3) $5x+3y-1=0$
4) $x-4y+7=0$
5) другой ответ

5. В треугольнике ABC известно, что $AB=2$, $\angle BAC=30^\circ$, $\angle ABC=45^\circ$. Найдите площадь треугольника ABC.

1) 2
2) $\sqrt{3}+1$
3) $\sqrt{3}-1$
4) $2\sqrt{3}-1$
5) другой ответ

6. Дан прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=1$ и $AD=\sqrt{3}$. Вычислите $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

1) 0
2) 1
3) $\sqrt{3}$
4) $2\sqrt{3}$
5) другой ответ

7. Найдите угол между двумя диагоналями, выходящими из одной и той же вершины правильного двенадцатиугольника, если во внутренней области этого угла содержится ровно две вершины данного двенадцатиугольника.

1) 30°
2) 60°
3) 45°
4) 90°
5) другой ответ

8. Хорды AB и AC имеют одинаковую длину. Величина образованного ими вписанного в окружность угла равна 30°. Найдите отношение площади той части круга, которая расположена внутри этого угла, к площади всего круга.

1) $\dfrac{\pi+1}{2\pi}$
2) $\dfrac{2\pi+1}{4\pi}$
3) $\dfrac{\pi+3}{6\pi}$
4) $\dfrac{2\pi+3}{6\pi}$
5) другой ответ

9. При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точка $K(-8,3)$ отображается на ту же точку, что и при симметрии относительно начала координат. Найдите координаты вектора $\vec{a}$.

1) $\{-16,6\}$
2) $\{-16,0\}$
3) $\{0,6\}$
4) $\{16,-6\}$
5) другой ответ

10. В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

1) $3\sqrt{3}$
2) 6
3) $4\sqrt{3}$
4) 9
5) другой ответ

11. На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята такая точка D, что $AD = 10$ и $\angle BDC = \angle BAL = 60^\circ$. Найдите площадь треугольника ABC.

1) 25
2) $20\sqrt{3}$
3) $25\sqrt{3}$
4) 50
5) другой ответ

12. Докажите, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.

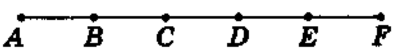
13. Точка O не лежит на данной окружности. Для каждой точки M_1 окружности на луче OM_1 взята точка M такая, что $OM = k \cdot OM_1$, где k — данное положительное число. Найдите геометрическое место всех таких точек M.

14. Даны два круга. Постройте круг, площадь которого равна сумме площадей данных кругов.

ТЕСТ 4

1. Отрезок AF разделен точками B, C, D, E на пять равных частей, как показано на рисунке. Найдите все такие числа x, что $\overline{AE} = x \cdot \overline{FA}$.

1) −0,8
2) 0,6
3) 1,25
4) −1,25
5) другой ответ



2. Дана окружность с центром в точке $O(6,7)$ и радиусом 5. Из точки $A(7,14)$ к этой окружности проведена касательная AB (B — точка окружности). Найдите ее длину.

1) 3
2) 4
3) 5
4) 6
5) другой ответ

3. Окружность с центром $O(0,-1)$ и радиусом 7 задается на координатной плоскости уравнением

1) $x^2+y^2+y-48=0$
2) $x^2+y^2+2y-6=0$
3) $x^2+y^2+2y-48=0$
4) $x^2+y^2-2y-48=0$
5) другой ответ

4. Даны координаты вершии трапеции $ABCD$: $A(-2,-2)$, $B(-3,1)$, $C(7,7)$, $D(3,1)$. Составьте уравнение прямой, содержащей среднюю лиииию этой трапеции.

1) $3x+5y+5=0$
2) $5x-3y-5=0$
3) $3x-5y-5=0$
4) $3x-5y+5=0$
5) другой ответ

5. Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN=1$, $MP=6$, $MQ=2$. При этом углы NMP и PMQ равны. Найдите радиус окружности.

1) 2
2) $\sqrt{5}$
3) $\dfrac{2\sqrt{34}}{\sqrt{15}}$
4) $\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{13}}$
5) другой ответ

6. При каких значениях x векторы $\vec{a}=\{x,-2\}$ и $\vec{b}=\{x-1,1\}$ перпендикулярны?

1) -1
2) 2
3) -1 и 2
4) таких x не существует
5) другой ответ

7. Около окружности описан квадрат и правильный шестиугольник. Найдите периметр квадрата, если периметр шестиугольника равен 48.

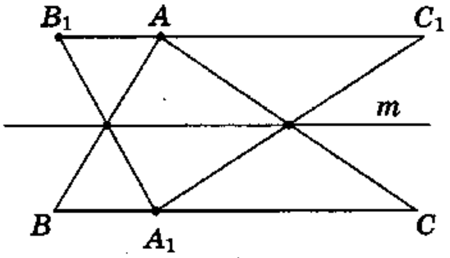
1) $16\sqrt{2}$
2) 32
3) $32\sqrt{3}$
4) 48
5) другой ответ

8. В треугольнике ABC сторона AB равна 4, угол A равен 30°, угол B равен 130°. На стороне AB как на диаметре построен круг. Найдите площадь части круга, лежащей внутри треугольника.

1) $\dfrac{\pi}{3}+2\sqrt{3}$
2) $\dfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$
3) $\pi+3\sqrt{3}$
4) $\dfrac{\pi}{3}+\sqrt{3}$
5) другой ответ

9. Треугольник $A_1B_1C_1$ симметричен данному треугольнику ABC относительно прямой m, проходящей через середины сторон AB и AC, как показано на рисунке. Найдите площадь общей части этих треугольников, если площадь треугольника ABC равна 60.

1) 15
2) 20
3) 30
4) 40
5) другой ответ



10. В треугольнике ABC длина стороны AC равна 3, угол BAC равен 30°, и радиус описанной окружности равен 2. Найдите площадь треугольника ABC.

1) 3
2) $\dfrac{3(3\sqrt{3}+\sqrt{7})}{8}$
3) $\dfrac{3(3\sqrt{3}+\sqrt{7})}{8}$ или $\dfrac{3(3\sqrt{3}-\sqrt{7})}{8}$
4) $3\sqrt{3}$
5) другой ответ

11. В остроугольном треугольнике ABC с углом B, равным 50°, на высоте BH взята такая точка D, что $\angle ADC = 130^\circ$. Найдите угол между прямыми AD и BC.

1) 50°
2) 60°
3) 80°
4) 90°
5) другой ответ

12. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

13. Даны две точки A и B, расстояние между которыми равно $2c$. Найдите геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от каждой из которых до точек A и B равна $2a^2$ при условии, что $a > c$.

14. Около данной окружности опишите правильный шестиугольник.

ТЕСТ 5

1\. Точка M лежит на отрезке AB так, что $AM:MB=3:4$. Точка P не принадлежит прямой AB. Найдите коэффициенты соответственно x и y в разложении $\overline{PM}=x\cdot\overline{PA}+y\cdot\overline{PB}$ вектора $\overline{PM}$ по векторам $\overline{PA}$ и $\overline{PB}$.

1) 3 и 4
2) 4 и 3
3) $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{7}$
4) $\frac{4}{7}$ и $\frac{3}{7}$
5) другой ответ

2\. Найдите центр окружности, проходящей через точку $A(-4,2)$ и касающейся оси Ox в точке $B(2,0)$.

1) (2,9)
2) (2,10)
3) (2,11)
4) (2,12)
5) другой ответ

3\. Даны точки $M(-3,5)$ и $N(7,-3)$. Составьте уравнение окружности с диаметром MN.

1) $(x-2)^2+(y-1)^2=41$
2) $(x-2)^2+(y-2)^2=36$
3) $(x-1)^2+(y-2)^2=39$
4) $(x-1)^2+(y-1)^2=49$
5) другой ответ

4\. Даны уравнения прямых, содержащих стороны треугольника ABC: $4x+3y-6=0$ — прямой AB, $2x+y-4=0$ — прямой AC и $2x-y=0$ — прямой BC. Найдите координаты точки D, являющейся серединой стороны BC.

1) $(1,2)$

2) $\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$

3) $(2,4)$

4) $\left(\frac{4}{5},-\frac{8}{5}\right)$

5) другой ответ

5. В треугольнике ABC сторона BC равна 6, сторона AC равна 5, а угол при вершине B равен 30°. Найдите площадь треугольника, если расстояние от вершины A до прямой BC меньше, чем $1/\sqrt{2}$.

1) $\frac{3(3\sqrt{3}-4)}{2}$

2) $\frac{3(3\sqrt{3}+4)}{2}$

3) 4

4) $2\sqrt{3}-3$

5) другой ответ

6. В треугольнике ABC известно, что $AB=3$, $BC=2$, $\overline{CA}\cdot\overline{CB}=1$. Найдите длину стороны AC.

1) 2

2) $\sqrt{5}$

3) $\sqrt{6}$

4) $\sqrt{7}$

5) другой ответ

7. Площадь круга, описанного около правильного двадцатипятиугольника, на 9π больше площади круга, вписанного в этот двадцатипятиугольник. Найдите периметр данного двадцатипятиугольника.

1) $100\sqrt{3}$

2) 250

3) 100

4) 150

5) другой ответ

8. Отношение длин двух пересекающихся окружностей равно $\sqrt{3}$. Общая хорда этих окружностей стягивает в меньшей из них дугу в 120°. Найдите градусную меру дуги, которую стягивает эта хорда в большей окружности.

1) 30°
2) 45°
3) 60°
4) 90°
5) другой ответ

9. При параллельном переносе на вектор $\overline{m}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AD})$ квадрат $ABCD$ со стороной 8 отображается на квадрат $A_1B_1C_1D_1$. Найдите периметр фигуры, состоящей из всех точек, принадлежащих хотя бы одному из квадратов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

1) 16
2) 36
3) 48
4) 64
5) другой ответ

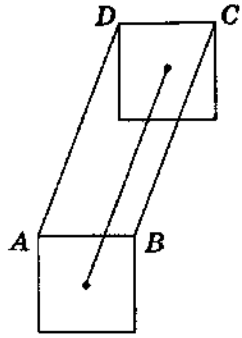
10. Найдите периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, если известно, что хорда длиной 2 см этой окружности удалена от ее центра на 3 см.

1) $3\sqrt{30}$ см
2) 18 см
3) $3\sqrt{39}$ см
4) 21 см
5) другой ответ

11. На окружности взяты последовательно точки P, Q, R и S так, что $PQ=PS$. Отрезки PR и QS пересекаются в точке T, причем $RQ=q$, $RS=s$, $RT=t$. Найдите PT.

1) $\dfrac{qs-t^2}{t}$
2) $\dfrac{qs}{t}$
3) $\sqrt{qs}-t$
4) $\dfrac{qs+t^2}{t}$
5) другой ответ

12. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ построены квадраты так, как показано на рисунке. Докажите, что отрезок, соединяющий центры этих квадратов, равен и параллелен стороне AD.



13. Даны две точки A и B, расстояние между которыми равно $2c$. Найдите геометрическое место точек, модуль разности квадратов расстояний от каждой из которых от точек A и B равен $4a^2$.

14. Около данной окружности опишите правильный восьмиугольник.

ТЕСТ 6

1. В трапеции $ABCD$ основание AD в три раза больше основания BC. Известно, что $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\overrightarrow{AB}$.

1) $\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

2) $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

3) $\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}$

4) $\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

5) другой ответ

2. Найдите длину медианы AM треугольника ABC, вершины которого имеют координаты: $A(0,1)$, $B(1,-4)$, $C(5,2)$.

1) 3

2) $\sqrt{10}$

3) $2\sqrt{3}$

4) $\sqrt{13}$

5) другой ответ

3. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(3,0)$ и $B(-1,2)$, если центр ее лежит на прямой $y=x+2$.

1) $(x-5)^2+(y-3)^2=25$

2) $(x-3)^2+(y-5)^2=25$

3) $(x-2)^2+(y-4)^2=16$

4) $(x-4)^2+(y-6)^2=25$

5) другой ответ

4. Даны две точки: $A(-7,5)$ и $B(3,-1)$. Составьте уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB.

1) $5x-3y+16=0$

2) $5x+3y+16=0$

3) $3x-5y+16=0$

4) $3x+5y-16=0$

5) другой ответ

5. В треугольнике ABC биссектриса BL перпендикулярна медиане AM. Известно, что угол BAC равен 120°, $AC = 1$. Найдите длину стороны AB.

1) $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$
2) $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$
3) 0,8
4) $\sqrt{5}-2$
5) другой ответ

6. Известно, что $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 6$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120°. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$.

1) 70
2) 28
3) 91
4) −45,5
5) другой ответ

7. Найдите сторону правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса 1.

1) 1/5
2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
3) $\sqrt{5}-2$
4) $2\sqrt{5}-4$
5) другой ответ

8. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором угол B равен 120° и $AB = \sqrt{3}$. С центром в точке B построен круг радиуса 1. Найдите площадь общей части треугольника и круга.

1) $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$
2) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
3) $\pi-\sqrt{3}$
4) $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$
5) другой ответ

9. Дана прямая $2x+3y=6$. Найдите площадь четырехугольника, образованного данной прямой и тремя прямыми, симметричными данной прямой относительно осей координат и начала координат.

1) 6
2) 8
3) 10
4) 12
5) другой ответ

10. В ромбе $ABCD$ со стороной, равной 6, и углом BAD, равным $60°$, на стороне BC взята точка E на расстоянии 2 от точки C. Найдите расстояние от точки E до центра ромба.

1) 2
2) $\sqrt{7}$
3) 3
4) $\sqrt{13}$
5) другой ответ

11. В трапеции $KLMN$ с основаниями LM и KN угол KLM прямой, $LM=l$, $KN=k$ и $MN=a$. Окружность проходит через точки M и N и касается прямой KL в точке A. Найдите площадь треугольника AMN.

1) $\frac{k+l}{2}\cdot a$
2) $a\sqrt{kl}$
3) $\frac{a\sqrt{kl}}{2}$
4) $a\sqrt{k^2+l^2}$
5) другой ответ

12. Докажите теорему Менелая: если прямая пересекает строны AB и BC треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а продолжение стороны AC за точку C — в точке Z, то

$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=1.$$

13. Найдите геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от каждой из которых до вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника вдвое больше квадрата расстояния до вершины прямого угла.

14. Дан острый угол ABC и точка D внутри него. Найдите на сторонах данного угла такие точки E и F, чтобы треугольник DEF имел наименьший периметр.

ТЕСТ 7

1. В треугольнике ABC медианы AD и CF пересекаются в точке O. Известно, что $\overline{AB}=\vec{a}$, $\overline{AC}=\vec{b}$. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\overline{OF}$.

1) $\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

2) $\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$

3) $\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

4) $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$

5) другой ответ

2. Найдите площадь треугольника ABC, вершины которого имеют координаты $A(0,1)$, $B(5,2)$, $C(1,-4)$.

1) 13
2) 14
3) 15
4) 16
5) другой ответ

3. Составьте уравнение окружности, проходящей через три данные точки $A(1,-4)$, $B(4,5)$ и $C(3,-2)$.

1) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

2) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{95}{2}$

3) $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{125}{2}$

4) $(x+5)^2+(y-4)^2=45$.

5) другой ответ

4. Даны три последовательные вершины параллелограмма $ABCD$: $A(3,1)$, $B(4,6)$, $C(-2,3)$. Составьте уравнение диагонали BD этого параллелограмма.

1) $8x+7y-74=0$
2) $8x-7y-10=0$
3) $8x-7y+10=0$
4) $7x-8y+20=0$
5) другой ответ

5. Дан треугольник со сторонами 4, 8 и 9. Найдите длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.

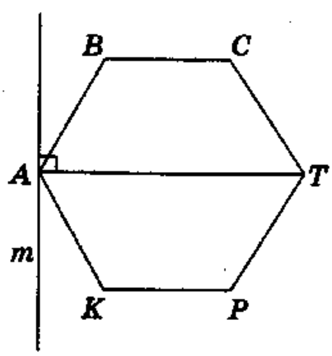
1) 3
2) $\sqrt{13}$
3) $\sqrt{14}$
4) 4
5) другой ответ

6. К одной и той же точке приложены две силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$, действующие под углом 120° друг к другу, причем $|\overline{P}| = 8$, а $|\overline{Q}| = 15$. Найдите величину равнодействующей силы $\overline{R}$.

1) 13
2) 14
3) 15
4) 16
5) другой ответ

7. Дан правильный шестиугольник $ABCTPK$. Прямая m проходит через вершину A перпендикулярно диагонали AT, как показано на рисунке. Найдите сторону этого шестиугольника, если расстояние от вершины C до прямой m равно 6.

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4
5) другой ответ



8. Сторона квадрата, изображенного на рисунке, равна 1. Вычислите площадь закрашенной фигуры.

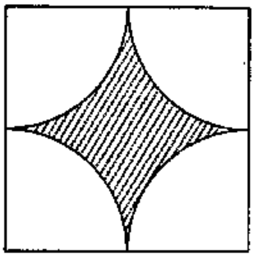
1) $\frac{\pi}{2}$

2) $\frac{\pi}{4}$

3) $2-\frac{\pi}{2}$

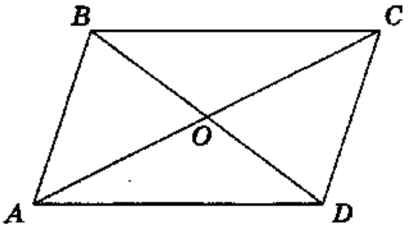
4) $1-\frac{\pi}{4}$

5) другой ответ



9. На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Треугольник ABD можно совместить с треугольником CBD при помощи

1) поворота вокруг точки B на некоторый угол
2) центральной симметрии относительно точки O
3) осевой симметрии относительно некоторой прямой
4) параллельного переноса на некоторый вектор
5) треугольники ABD и CBD никаким движением совместить нельзя



10. В параллелограмме $PQRS$ биссектриса угла при вершине P, равного 80°, пересекает сторону RS в точке L. Найдите радиус окружности, касающейся отрезка PQ и лучей QR и PL, если $PQ=7$.

1) $7\cos 40^\circ \operatorname{tg} 20^\circ$

2) $7\sin 80^\circ \cos 20^\circ$

3) $7\cos 40^\circ \cos 20^\circ$

4) $7\cos 40^\circ \operatorname{tg} 70^\circ$

5) другой ответ

11. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB=\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{5}$ и $AC=3$. Сравните величину угла BOC и $112{,}5^\circ$, если O — центр вписанной в треугольник ABC окружности.

1) $\angle BOC < 112{,}5^\circ$
2) $\angle BOC = 112{,}5^\circ$
3) $\angle BOC > 112{,}5^\circ$
4) невозможно сравнить

12. Докажите, что сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

13. Найдите геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от каждой из которых до трех вершин равностороннего треугольника постоянна при условии, что этому геометрическому месту принадлежит середина одной из сторон треугольника.

14. Постройте трапецию по ее основаниям и диагоналям.

ТЕСТ 8

1. В равностороннем треугольнике ABC, в котором $AB=1$, проведены медианы AD, BE и CF. Найдите длину вектора $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF})$.

1) 1
2) 0
3) 2
4) $\sqrt{3}$
5) другой ответ

2. Найдите периметр треугольника MNP, вершины которого имеют координаты $M(4,0)$, $N(12,-2)$, $P(5,-9)$.

1) 23
2) $2\sqrt{17}+11$
3) $\sqrt{82}+2\sqrt{17}+7\sqrt{2}$
4) $9+6\sqrt{3}+\sqrt{26}$
5) другой ответ

3. Окружность задана уравнением $(x+6)^2+(y+6)^2=18$. Найдите величину угла между касательными к этой окружности, проведенными через начало координат.

1) 90°
2) 60°
3) 30°
4) 120°
5) другой ответ

4. Рассматриваются треугольники ABC, у которых вершина $A(0,7)$ — общая, а вершины B и C расположены на прямой $y=2x$. Тогда средние линии всех таких треугольников (параллельные BC) лежат на прямой, уравнение которой имеет вид

1) $4x+2y+7=0$
2) $2x-y+3,5=0$
3) $2x-4y+3,5=0$
4) $2x+4y+14=0$
5) другой ответ

5. Площадь треугольника ABC равна 3, угол BAC равен 60° и $AC=1$. Найдите BC.

1) 6
2) $3\sqrt{3}+1$
3) $\sqrt{45-5\sqrt{3}}$
4) $\sqrt{49-4\sqrt{3}}$
5) другой ответ

6. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=4$ и $\vec{a}\perp\vec{b}$.

1) 10
2) 11
3) 12
4) 13
5) другой ответ

7. Какое наибольшее число общих вершин могут иметь вписанные в одну и ту же окружность правильные пятнадцатиугольник и двадцатиугольник?

1) 3
2) 4
3) 5
4) 6
5) другой ответ

8. Лесной участок имеет форму круга. Чтобы обойти этот участок по опушке, идя со скоростью 4 км/ч, нужно затратить на 45 мин больше, чем для того, чтобы пересечь его по диаметру. Найдите длину опушки данного участка.

1) $\dfrac{2\pi}{\pi-1}$
2) $\dfrac{3\pi}{\pi-1}$
3) $\pi+1$
4) $\pi(\pi-1)$
5) другой ответ

9. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга внешним образом и могут быть совмещены поворотом вокруг некоторой точки K на угол 90°. Найдите произведение радиусов этих окружностей, если расстояние от точки K до прямой O_1O_2 равно 5.

1) 20
2) 25
3) 50
4) 100
5) другой ответ

10. В параллелограмме $ABCD$ длина диагонали BD равна 2, угол C равен 45°, причем прямая CD касается окружности, описанной около треугольника ABD. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4
5) другой ответ

11. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что окружность, проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC. Найдите AD, если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

1) 6
2) 8
3) 9
4) 10
5) другой ответ

12. Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC, при этом $BM = kMC$. Докажите, что

$$(1+k)^2 AM^2 = k^2b^2 + 2bck\cos A + c^2,$$

где $b = AC$, $c = AB$.

13. Найдите геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от каждой из которых до двух вершин A и B треугольника ABC равна квадрату расстояния до его третьей вершины C.

14. Даны две параллельные прямые b и c и точка A, не лежащая ни на одной из них. Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы вершины B и C лежали соответственно на прямых b и c.

ТЕСТ 9

1. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AK}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AL}=\vec{b}$. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\overrightarrow{BC}$.

   1) $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$
   2) $\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$
   3) $\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}$
   4) $-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$
   5) другой ответ

1 2 3 4 5

2. На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек $A(1,2)$ и $B(-3,4)$.

   1) $(-2,0)$
   2) $\left(-\frac{5}{2},0\right)$
   3) $(-3,0)$
   4) $(-4,0)$
   5) другой ответ

1 2 3 4 5

3. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(-3,0)$ и $B(0,9)$, если известно, что центр окружности лежит на оси ординат.

   1) $x^2+(y-4)^2=25$
   2) $x^2+(y+4)^2=25$
   3) $x^2+(y-4)^2=36$
   4) $x^2+(y-4)^2=16$
   5) другой ответ

1 2 3 4 5

4. Прямые $y=3x-1$, $y=3x+5$ и $y=3x+7$ пересекают прямую $47x+74y-11=0$ соответственно в точках A, B и C. Найдите отношение длин отрезков AB и BC.

1 2 3 4 5

1) 3:1
2) 7:5
3) 47:74
4) 2:1
5) другой ответ

5. У треугольника известны длины двух сторон $a=2$, $b=3$ и площадь $S=\frac{3\sqrt{15}}{4}$. Медиана, проведенная к его третьей стороне, меньше ее половины. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

1) $\frac{4}{\sqrt{15}}$
2) $\frac{8}{\sqrt{15}}$
3) $\frac{8}{\sqrt{7}}$
4) 3
5) другой ответ

6. Найдите сумму длин диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, если $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{q}|=3$ и $\angle(\vec{p},\vec{q})=45^\circ$.

1) 38
2) $15+\sqrt{593}$
3) $15+\sqrt{621}$
4) 40
5) другой ответ

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 5. Если при этом сторона AB равна стороне вписанного в эту окружность правильного треугольника, сторона BC — стороне вписанного в эту окружность правильного девятиугольника, а сторона CD — стороне вписанного в эту окружность правильного восемнадцатиугольника, то длина стороны AD равна

1) 10
2) 5
3) $5\sqrt{3}$
4) $10-\sqrt{3}$
5) другой ответ

8. Фигура ограничена большими дугами двух окружностей, опирающимися на общую хорду, длина которой равна 6 см. Для одной окружности эта хорда является стороной вписанного квадрата, для другой — стороной вписанного правильного шестиугольника. Найдите сумму длин этих дуг.

1) $\pi\left(10+\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\right)$ см

2) $\pi\left(8+5\sqrt{2}\right)$ см

3) $\pi\left(10+6\sqrt{2}\right)$ см

4) $\pi\left(8+\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\right)$ см

5) другой ответ

9. Два квадрата $ABCD$ и $AMPK$ имеют единственную общую вершину A и расположены так, что точки P, A и C лежат на одной прямой. Найдите сумму площадей этих квадратов, если они могут быть совмещены параллельным переносом на некоторый вектор $\vec{m}$, длина которого равна 6.

1) 9
2) 18
3) 36
4) 72
5) другой ответ

10. Треугольник ABC со стороной $AB=4$ и углом A, равным 60°, вписан в окружность радиуса $2\sqrt{3}$. Найдите длину средней линии этого треугольника, параллельной AC.

1) $\sqrt{3}+1$
2) $\sqrt{6}$
3) $\sqrt{6}+1$
4) 4
5) другой ответ

11. Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причем $AB=42$, $CD=40$. Найдите длину медианы CE треугольника ABC, если известно, что она меньше 10.

1) 6

2) 7

3) 8

4) 9

5) другой ответ

12. В треугольнике ABC отрезок AM — медиана, $b = AC$, $c = AB$. Докажите, что $AM = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos A}$.

13. Найдите геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от каждой из которых до трех вершин треугольника ABC равна a^2.

14. Постройте границу круга, площадь которого равна площади данного кругового сектора, ограниченного дугой в 60°.

ТЕСТ 10

1. Длины сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$ равны соответственно 8 и 12, а его диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину вектора $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})$.

1) 4
2) 8
3) 6
4) 12
5) другой ответ

2. Даны две смежные вершины параллелограмма $ABCD$: $A(-4,-7)$, $B(2,6)$ и точка пересечения его диагоналей $M(3,1)$. Найдите длину стороны BC этого параллелограмма.

1) 8
2) $\sqrt{69}$
3) $\sqrt{73}$
4) 9
5) другой ответ

3. Составьте уравнение окружности, проходящей через точку $A(2,5)$ и касающейся оси Ox в точке $B(3,0)$.

1) $(x-3)^2+(y-2)^2=4$
2) $(x-3)^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$
3) $(x-3)^2+\left(y-\dfrac{13}{5}\right)^2=\dfrac{169}{25}$
4) $(x-3)^2+(y-3)^2=9$
5) другой ответ

4. Найдите длину отрезка прямой $4x+3y-12=0$, заключенного между осями координат.

1) 2
2) 3
3) 4
4) 5
5) другой ответ

5. В треугольнике ABC сторона $AB = 6$, $\angle BAC = 30^\circ$, радиус описанной окружности равен 5. Найдите сумму всех значений, которые может принимать длина стороны AC.

1) $6\sqrt{3}$
2) 8
3) $3\sqrt{3}$
4) $\frac{5\sqrt{7}}{3}$
5) другой ответ

6. При каком значении x векторы $\vec{p} = x\vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120°?

1) 40
2) 42
3) 45
4) 50
5) другой ответ

7. Число, равное периметру правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса 2, принадлежит промежутку

1) (0;4]
2) (4;8]
3) (8;12,6]
4) (12,6;20]
5) (20;+∞)

8. Дан правильный треугольник со стороной, равной 2. Все точки M, расположенные внутри этого треугольника и удаленные от каждой из его вершин на расстояние не менее чем 1, составляют фигуру, площадь которой равна

1) $0,5\pi$
2) $\sqrt{10} - \pi$
3) $\sqrt{3} - 0,5\pi$
4) $\pi - \sqrt{3}$
5) другой ответ

9. Два равнобедренных треугольника ABD и DBC могут быть совмещены поворотом вокруг точки B на угол 30°. Найдите сумму площадей этих треугольников, если длина их общей стороны равна 8.

1) 32
2) $32\sqrt{3}$
3) 64
4) $64\sqrt{3}$
5) другой ответ

1 2 3 4 5

10. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в 7 раз меньше площади четырехугольника $ABDE$. Найдите длину отрезка DE, если $AB = 4$.

1) 1
2) $\sqrt{2}$
3) 2
4) $2\sqrt{2}$
5) другой ответ

1 2 3 4 5

11. Угол между радиусом AO окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, и стороной AC равен 40°. Найдите угол A треугольника ABC, если угол C равен 50°.

1) 50°
2) 60°
3) 70°
4) 80°
5) другой ответ

1 2 3 4 5

12. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разделяет треугольник на два треугольника. Докажите, что отношение длин окружностей, вписанных в эти треугольники, равно тангенсу одного из острых углов исходного треугольника.

13. Найдите геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме расстояний до его двух других противоположных вершин.

14. Постройте треугольник по трем медианам.

ТЕСТ 11

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Найдите все действительные значения x, при которых векторы $\vec{c}=\vec{a}+(x+2)\cdot\vec{b}$ и $\vec{d}=x\cdot\vec{a}+3\vec{b}$ коллинеарны.

1) -3 и 1
2) 1
3) -3
4) 1 и 3
5) таких значений нет

2. Дан треугольник ABC с вершинами $A(4,1)$, $B(7,5)$ и $C(-4,7)$. Вычислите длину биссектрисы AD угла BAC.

1) 4
2) $\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$
3) $\sqrt{26}$
4) $\dfrac{10\sqrt{3}}{2}$
5) другой ответ

3. Найдите длину общей хорды двух окружностей, заданных на координатной плоскости уравнениями $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ и $x^2+y^2=1$.

1) 2
2) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$
3) $3/2$
4) 1
5) другой ответ

4. Вершина A треугольника OAB лежит на прямой $y=x$, вершина B — на прямой $y=\sqrt{3}x$, O — начало координат. Найдите величину угла AOB, если абсциссы точек A и B положительны.

1) 10°
2) 15°
3) 30°
4) 45°
5) другой ответ

5. В параллелограмме стороны равны 6 и 7, а одна из диагоналей равна 3. Найдите длину другой диагонали параллелограмма.

1) 12
2) $5\sqrt{6}$
3) $\sqrt{161}$
4) 13
5) другой ответ

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке F. Известно, что $AF = CF = 2$, $BF = 1$, $DF = 4$, $\angle BFC = 60^\circ$. Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

1) $7/8$
2) $13/14$
3) $15/16$
4) $19/20$
5) другой ответ

7. Значение выражения $2013 \cdot \sin\left(\dfrac{180}{2013}\right)^\circ$ находится ближе всего к числу

1) 0
2) 3
3) 1
4) 100
5) невозможно определить

8. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 \le 0, \\ x \ge 1. \end{cases}$$

1) $1+\pi$

2) $2\pi-1$

3) $2+\dfrac{3\pi}{2}$

4) $1+\dfrac{3\pi}{2}$

5) другой ответ

9. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD и средней линией, равной 5. Диагонали трапеции пересекаются в точке M. Найдите высоту этой трапеции, если треугольники AMB и BMC могут быть совмещены поворотом вокруг точки M на угол $90°$.

1) 2,5

2) $2{,}5\sqrt{2}$

3) 5

4) $5\sqrt{2}$

5) такой трапеции не существует

10. В трапеции $BCDE$, в которой $CD \parallel BE$, известно, что $DE = b$, а расстояние от середины отрезка BC до прямой DE равно d. Найдите площадь трапеции.

1) bd

2) $\dfrac{b^2(b+d)}{2d}$

3) $\dfrac{d^2(b+d)}{2b}$

4) $\dfrac{(b+d)\sqrt{bd}}{2}$

5) другой ответ

11. Прямая m имеет с квадратом $ABCD$ одну общую точку A. Расстояния от точек B и D до прямой m равны соответственно b и d. Найдите расстояние от точки C до прямой m.

1) $b+d$

2) $\dfrac{b^2}{d}$

3) $\sqrt{b^2+d^2}$

4) $\sqrt{bd}$

5) другой ответ

12. Дана прямая a и точки M и N, лежащие по одну сторону от нее. Докажите, что на прямой a существует единственная точка X такая, что сумма расстояний $MX+XN$ имеет наименьшее значение.

13. Даны две окружности $x^2+y^2-6x+5=0$ и $x^2+y^2+8x+15=0$. Найдите геометрическое место точек, из каждой из которых к этим окружностям можно провести равные касательные.

14. В данную окружность впишите правильный десятиугольник.

ТЕСТ 12

1. Точка M — середина отрезка AB, точка P не принадлежит прямой AB. Найдите коэффициенты соответственно x и y в разложении $\overrightarrow{PM} = x \cdot \overrightarrow{PA} + y \cdot \overrightarrow{PB}$ вектора $\overrightarrow{PM}$ по векторам $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PB}$.

1) 1 и 1
2) 0,5 и 0,5
3) 1 и 0,5
4) 0,5 и 1
5) другой ответ

2. Найдите точку пересечения общих внешних касательных двух окружностей, центры которых находятся в точках $O_1(2,5)$ и $O_2\left(\frac{22}{3}, \frac{31}{3}\right)$, а радиусы равны соответственно 3 и 7.

1) (1,1)
2) (1,2)
3) (–2,1)
4) (2,1)
5) другой ответ

3. Степенью точки M относительно окружности с центром O и радиусом R называется число $\sigma = OM^2 - R^2$. Найдите степень точки $A(-1,-2)$ относительно окружности $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 25 = 0$.

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4
5) другой ответ

4. Точки $A(1,2)$, $B(2,5)$ и $C(-10,-31)$

1) не лежат на одной прямой
2) лежат на одной прямой, причем A между B и C
3) лежат на одной прямой, причем B между A и C
4) лежат на одной прямой, причем C между A и B

5. В равнобедренной трапеции основания равны 2 и 5, а диагональ равна 4. Найдите длину боковой стороны этой трапеции.

1) $\sqrt{6}$
2) $\sqrt{7}$
3) $2\sqrt{2}$
4) 3
5) другой ответ

6. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Вычислите $\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{CA}\cdot\overline{BE}+\overline{AB}\cdot\overline{CF}$.

1) 0
2) $a+b+c$, где a, b и c — длины сторон треугольника
3) abc, где a, b и c — длины сторон треугольника
4) нет однозначного ответа

7. Диагонали A_1A_6 и A_2A_9 правильного двенадцатиугольника $A_1A_2\ldots A_{12}$ пересекаются в точке B. Найдите отношение $A_1B:BA_6$.

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
2) $\sqrt{2}\cdot\sin 15^\circ$
3) $\sqrt{2}\cdot\sin 7{,}5^\circ$
4) $1/2$
5) другой ответ

8. Найдите периметр фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy системой неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y+9\le 0, \\ y\le 3x. \end{cases}$$

1) $1+2\pi$
2) $2+2\pi$
3) $2+\pi$
4) $2\pi-1$
5) другой ответ

9. Угол между прямыми a и b равен $32°$. При некотором движении прямая a совмещается с прямой b. Это движение может быть

1) параллельным переносом
2) осевой симметрией относительно некоторой прямой, параллельной прямой b
3) центральной симметрией относительно некоторой точки, не лежащей на прямой a
4) поворотом вокруг некоторой точки на острый угол
5) ни одним из перечисленных видов движений совместить прямые a и b нельзя

1 2 3 4 5

10. Через точку L окружности проведена касательная и хорда LM длины 5. Хорда MN параллельна касательной и равна 6. Найдите радиус окружности.

1) 3
2) 25/8
3) 7/2
4) 4
5) другой ответ

1 2 3 4 5

11. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Прямая m имеет с этим квадратом одну общую точку A. Расстояние от точки B до прямой m равно b. Найдите расстояние от точки D до прямой m.

1) $\frac{a+b}{2}$
2) $\frac{a^2}{b}$
3) $\sqrt{a^2-b^2}$
4) $\sqrt{ab}$
5) другой ответ

1 2 3 4 5

12. Пусть A и B — данные точки, k — данное положительное число, не равное 1. Докажите, что множество всех точек M, удовлетворяющих условию $AM = kBM$, есть окружность (окружность Аполония).

13. Даны две окружности $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$. Найдите геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к первой окружности, вдвое длиннее касательных, проведенных ко второй окружности.

14. Постройте трапецию, стороны которой соответственно равны данным отрезкам.

ТЕСТ 13

1. Длина вектора $\vec{a}$ равна 2, а длина вектора $(\vec{a}+\vec{b})$ равна 10. Сколько различных целых значений может принимать длина вектора $\vec{b}$?

1) 1
2) 5
3) 7
4) 11
5) другой ответ

2. Даны три последовательные вершины трапеции $A(-1,-2)$, $B(1,3)$, $C(9,9)$. Найдите четвертую вершину D этой трапеции, зная, что длина ее основания AD равна 15.

1) (11,7)
2) (12,6)
3) (11,6)
4) (12,7)
5) другой ответ

3. Точка M имеет относительно окружностей $x^2+y^2=1$ и $(x-4)^2+y^2=4$ одинаковую степень (степенью точки M относительно окружности с центром O и радиусом R называется число $\sigma=OM^2-R^2$). Найдите абсциссу точки M.

1) 1
2) 5/4
3) 3/2
4) 13/8
5) нет однозначного ответа

4. Найдите ординату точки M, лежащей на прямой AB, если известно, что $A(-8,-6)$, $B(-3,-1)$ и абсцисса точки M равна 5.

1) 5
2) 6
3) 7
4) 8
5) другой ответ

5. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AC выбрана точка M так, что $\angle ABM = 60^\circ$, $AM = 3$, $MC = 1$. Найдите площадь треугольника ABC.

1) $\sqrt{3}$
2) 2
3) 3
4) $2\sqrt{3}$
5) другой ответ

6. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Известно, что $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 2$. Найдите $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$.

1) 1
2) 2
3) 4
4) нет однозначного ответа

7. Диагонали A_1A_4 и A_2A_7 правильного десятиугольника $A_1A_2 \ldots A_{10}$ пересекаются в точке B. Найдите отношение $A_1B : BA_4$.

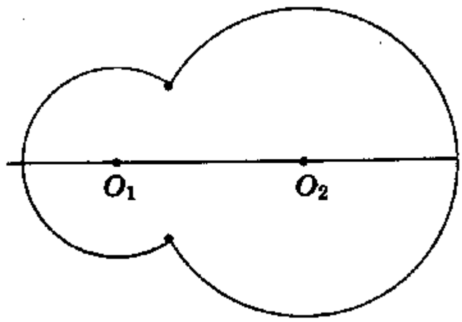
1) $\sin 36^\circ$
2) $\sin 18^\circ$
3) $2\sin 18^\circ$
4) $\dfrac{\sin 18^\circ}{2}$
5) другой ответ

8. Расстояние между центрами двух окружностей O_1O_2 равно 2, радиусы окружностей равны 1 и $\sqrt{3}$, как показано на рисунке. Найдите длину получившейся «восьмерки».

1) $\dfrac{\pi}{3}(4+5\sqrt{3})$
2) $\dfrac{2\pi}{3}(2+3\sqrt{3})$
3) $\pi\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+4\right)$

4) $\frac{\pi}{3}(8+3\sqrt{3})$

5) другой ответ



9. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка M. При повороте вокруг точки M на угол 120° точка B переходит в точку C, а точка A — в точку D, лежащую на продолжении стороны AB за точку B. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB=1$.

1) $1/2$
2) $\sqrt{3}/4$
3) $\sqrt{3}/2$
4) 1
5) другой ответ

10. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD>BC$) равна 48, а площадь треугольника AOB, где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 9. Найдите отношение оснований трапеции $AD:BC$.

1) $2:1$
2) $3:1$
3) $6:1$
4) $9:1$
5) другой ответ

11. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, точки B_1 и C_1 — точки касания этой окружности со сторонами AC и AB соответственно. Известно, что $B_1C_1=4$, $\sin\angle BAC=0{,}4$. Найдите длину отрезка AO.

1) $4\sqrt{3}$
2) 10
3) $8\sqrt{2}$
4) $8\sqrt{3}$
5) другой ответ

12. Докажите, что в треугольнике ABC биссектриса AA_1 вычисляется по формуле $AA_1 = \dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$, где $b = AC$, $c = AB$.

13. Найдите геометрическое место точек, для каждой из которых квадрат расстояния до точки пересечения двух взаимно перпендикулярных прямых в 2,5 раза больше произведения расстояний до этих прямых.

14. На стороне угла AOB с недоступной вершиной дана точка M. Постройте отрезок, равный отрезку OM.

ТЕСТ 14

1. Векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ таковы, что $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{OD}$, а расстояние между точками C и D равно 30. Найдите длину вектора $\overrightarrow{OC}$.

1) 15
2) 30
3) 45
4) 75
5) другой ответ

2. Даны точки $B(-5,-3)$ и $C(11,15)$. Точка A лежит на прямой BC. Найдите абсциссу точки A, если ее ордината равна 6.

1) 3
2) 4
3) -3
4) 8
5) другой ответ

3. Радиус окружности, имеющей центр в точке $O(4,3)$ и касающейся окружности $x^2 + y^2 = 1$, может быть равен

1) 4
2) 6
3) 4 или 6
4) 6 или 8
5) другой ответ

4. Какая из перечисленных ниже прямых содержит биссектрису одного из углов, образованных прямыми $y = 5x - 3$ и $y = -5x + 17$?

1) $x = 0$
2) $y = 0$
3) $x = 7$
4) $y = 7$
5) другой ответ

5. В треугольнике со сторонами 6, 7 и 8 найдите длину медианы, проведенной к большей стороне.

1) 5
2) $\frac{\sqrt{106}}{2}$
3) $3\sqrt{3}$
4) $\sqrt{31}$
5) другой ответ

6. Дан вектор $\overline{OA}=\{4,1\}$ (O — начало координат). Найдите вектор $\overline{OB}$, полученный из вектора $\overline{OA}$ поворотом на 90° по часовой стрелке.

1) $\{4,-1\}$
2) $\{-1,4\}$
3) $\{1,-4\}$
4) $\{-4,1\}$
5) другой ответ

7. В окружность радиуса 1 вписан правильный восьмиугольник $A_1A_2...A_8$. Прямые A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 и A_7A_8 образуют квадрат. Найдите длину диагонали этого квадрата.

1) 1
2) $\sqrt{2}$
3) $\frac{1}{\sin 22{,}5^\circ}$
4) $2\sqrt{2}$
5) другой ответ

8. Найдите длину кривой, являющейся графиком функции $y=\sqrt{4-x^2}$.

1) $0{,}5\pi$
2) 3
3) π
4) 2π
5) другой ответ

9. Напишите уравнение окружности, симметричной окружности $x^2+y^2+2x+y=0$ относительно начала координат.

1) $x^2+y^2-2x-y=0$
2) $x^2+y^2+2x-y=0$
3) $x^2+y^2+x+2y=0$
4) $x^2+y^2+x-2y=0$
5) другой ответ

10. Через вершины A, B и C параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB=3$ и $BC=5$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E, причем $BE=9$. Найдите длину диагонали BD.

1) 3
2) 11/3
3) 34/9
4) 4
5) другой ответ

11. Две медианы треугольника, равные 9 и 12, взаимно перпендикулярны. Найдите длину третьей медианы этого треугольника.

1) 10
2) 12
3) 14
4) 15
5) другой ответ

12. Докажите, что в треугольнике ABC биссектриса AD вычисляется по формуле $AD=\sqrt{AB\cdot AC-DB\cdot DC}$.

13. Найдите геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до осей координат постоянна при условии, что этому геометрическому месту принадлежит точка $(2,-1)$.

14. Даны две пересекающиеся окружности. Постройте отрезок, концы которого лежат соответственно на данных окружностях, а середина совпадает с одной из точек пересечения данных окружностей.

ТЕСТ 15

1. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке K, при этом $\overrightarrow{KB} = -\frac{2}{7} \cdot \overrightarrow{BD}$. Найдите все такие числа x, что $\overrightarrow{DA} = x \cdot \overrightarrow{BC}$.

1) 0,4
2) 2,5
3) –2,5
4) –0,4
5) другой ответ

2. Вершина A треугольника ABC имеет координаты $(8,5)$. Найдите сумму ординат вершин B и C этого треугольника, если известно, что его средняя линия, параллельная стороне BC, лежит на оси абсцисс.

1) 0
2) –10
3) 10
4) –5
5) другой ответ

3. Окружности $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ и $(x-2)^2+(y-6)^2=64$ расположены на координатной плоскости следующим образом:

1) круги, ограниченные данными окружностями, не имеют общих точек
2) окружности касаются внешним образом
3) окружности имеют ровно две общие точки
4) окружности касаются внутренним образом
5) круг, ограниченный одной окружностью, содержится внутри круга, ограниченного другой окружностью (при этом сами окружности не имеют общих точек)

4. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-7,5)$, $B(3,-1)$, $C(5,3)$. Составьте уравнение средней линии этого треугольника, параллельной AB.

1) $3x+5y-17=0$
2) $5x-3y+17=0$
3) $5x+3y-17=0$
4) $x+y-21=0$
5) другой ответ

5. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 4, 5 и 6.

1) $\frac{5}{\sqrt{3}}$
2) 4
3) $\frac{8}{\sqrt{7}}$
4) $\sqrt{17}$
5) другой ответ

6. Известно, что $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60^\circ$. Найдите длину вектора $\vec{p}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

1) 13
2) $5\sqrt{7}$
3) $6\sqrt{5}$
4) $\sqrt{181}$
5) другой ответ

7. В окружность вписаны правильные двадцатиугольник и шестидесятиугольник, имеющие общую вершину A. Найдите площадь общей части этих многоугольников, если площадь двадцатиугольника равна 20.

1) 10
2) $10\sqrt{2}$
3) 15
4) 20
5) другой ответ

8. На стороне AB равностороннего треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Найдите площадь общей части треугольника и круга, ограниченного этой окружностью, если $AB=2$.

1) $\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$

2) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$

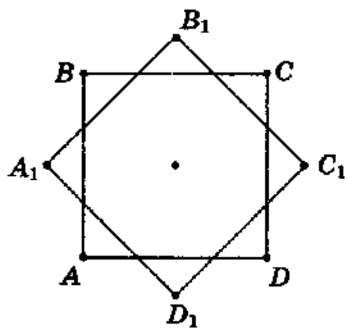
3) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$

4) $\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}$

5) другой ответ

9. Квадрат $A_1B_1C_1D_1$ получен из квадрата $ABCD$ поворотом на угол 45° вокруг своего центра, как показано на рисунке. Найдите площадь восьмиугольника $AA_1BB_1CC_1DD_1$, если $AB=1$.

1) 1
2) 2
3) $\sqrt{2}$
4) $2\sqrt{2}$
5) другой ответ



10. Окружность радиуса 3 проходит через вершины A и B прямоугольного треугольника ABC с катетом $AB=5$. Прямая CD касается этой окружности в точке D. Найдите синус угла ABD, если известно, что луч DA делит угол CDB пополам.

1) $2/3$
2) $3/4$
3) $4/5$
4) $5/6$
5) другой ответ

11. Две медианы треугольника, равные 15 и $6\sqrt{3}$, пересекаются под углом 60°. Найдите площадь этого треугольника.

1) 90
2) 180
3) 270
4) 540
5) другой ответ

12. Докажите, что стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей, перпендикулярна к одной из биссектрис треугольника.

13. Найдите геометрическое место точек, произведение расстояний от каждой из которых до двух противоположных сторон квадрата равно произведению расстояний до двух других противоположных сторон.

14. Даны точки A и B и две пересекающиеся прямые c и d. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы вершины C и D лежали соответственно на прямых c и d.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

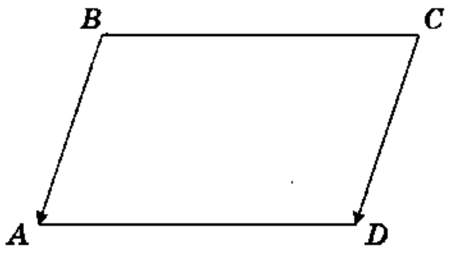
Тест 1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	3	3	4	2	4	4	2	1	3	3	2

1. Проведем следующие преобразования:

$$\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$$

2. Имеем: $\overrightarrow{BA}=\{-3,-2\}$. Прибавив к координатам точки C координаты вектора $\overrightarrow{CD}$, равного $\overrightarrow{BA}$, получим, что точка D имеет координаты $(1,-2)$.



3. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

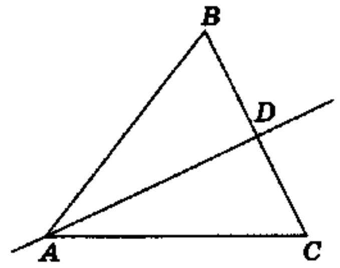
$$x^2+y^2+x=0 \Leftrightarrow x^2+x+\frac{1}{4}+y^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}.$$

Таким образом, мы получили уравнение окружности, центр которой находится в точке $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

4. Координаты точки D, являющейся серединой стороны BC, находим как полусуммы соответствующих координат точек B и C. Имеем: $D=(5,-2)$. Пусть $ax+by+c=0$ — уравнение искомой прямой. Так как точки A и D лежат на этой прямой, получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases}-2a+3b+c=0,\\ 5a-2b+c=0.\end{cases}$$

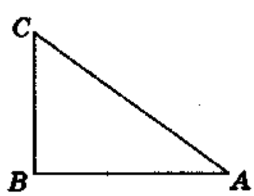
Вычитая из второго уравнения этой системы первое, находим, что $7a = 5b$. Таким образом, можно считать, что $a = 5$ и $b = 7$. Тогда $c = -11$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $5x + 7y - 11 = 0$.



5. Пусть $AB = x$, тогда $BC = 7 - x$. Применив к треугольнику ABC теорему косинусов, получим, что

$$(7-x)^2 = 25 + x^2 - 2\cdot 5\cdot x\cdot \frac{4}{5} \Leftrightarrow 49 - 14x + x^2 = 25 + x^2 - 8x \Leftrightarrow x = 4.$$

Значит, $AB = 4$, $BC = 3$, $AC = 5$. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный, и его площадь равна $S = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = 6$.

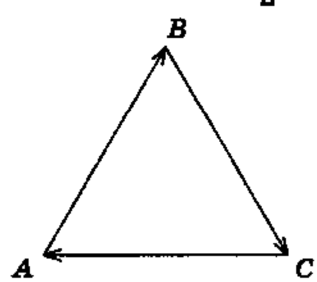


6. Вычислим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Так как длина каждого из этих векторов равна 1, а угол между ними равен 120°, имеем:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) = -\frac{1}{2}.$$

Аналогично, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}$ и $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}$.

Поэтому $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}$.

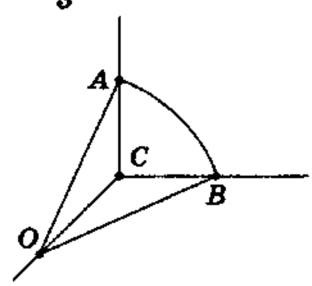


7. Градусная мера внешнего угла данного четырехугольника равна $180^\circ-144^\circ=36^\circ$. Так как сумма градусных мер всех внешних углов любого выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°, то данный многоугольник имеет $360:36=10$ вершин. Поэтому его периметр равен 10.

8. Рассмотрим треугольник OAC. В нем $OA=2$, $OC=\sqrt{2}$, $\angle ACO=135^\circ$. Пусть $\angle OAC=\alpha$. Применим к этому треугольнику теорему синусов:

$$\frac{OA}{\sin\angle ACO}=\frac{OC}{\sin\angle OAC} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 135^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{1}{2}.$$

Значит, $\angle OAC=30^\circ$ и $\angle AOC=180^\circ-135^\circ-30^\circ=15^\circ$. Аналогично, $\angle BOC=15^\circ$ и $\angle AOB=30^\circ$. Площадь кругового сектора радиуса 2, ограниченного дугой с градусной мерой 30°, вычисляется по формуле $S=\frac{\pi\cdot 2^2}{360}\cdot 30=\frac{\pi}{3}$.



9. Так как точка $M(1,1)$ принадлежит прямой $3x-2y-1=0$, то при симметрии относительно точки M эта прямая отображается на себя.

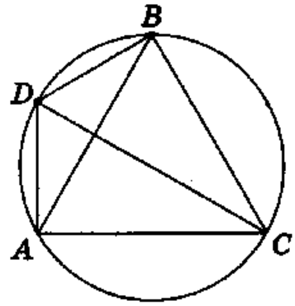
10. Угол ADC равен углу ABC (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Применим к треугольнику ADC теорему косинусов:

$$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9=3+CD^2-2\sqrt{3}\cdot CD\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow CD=2\sqrt{3}.$$

Аналогично, $\angle BDC=\angle BAC=60^\circ$. Применив к треугольнику BDC теорему косинусов, получим, что

$$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle BDC \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9=BD^2+12-4\sqrt{3}\cdot BD\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow BD=\sqrt{3}.$$

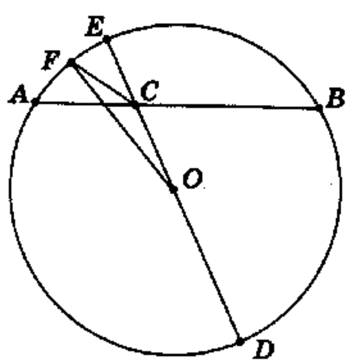
Следовательно, $BD+CD=3\sqrt{3}$.



11. Пусть O — центр данной окружности, DE — диаметр, проходящий через точку C (C между O и E). Покажем, что точка E — ближайшая к C точка окружности. Для этого выберем на окружности точку F, отличную от точки E. Тогда согласно неравенству треугольника $OC+CF>OF=OE=OC+CE$, откуда $CF>CE$. Найдем CE. Для пересекающихся хорд в окружности верно равенство

$$AC\cdot CB=DC\cdot CE \Leftrightarrow 4\cdot 5=(12-CE)\cdot CE \Leftrightarrow CE^2-12CE+20=0,$$

откуда $CE=2$.



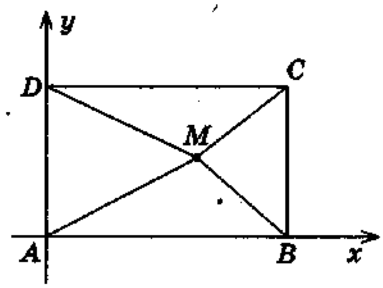
12. Пусть $AB=a$ и $AD=b$ — стороны данного прямоугольника. Выберем систему координат таким образом, что точка A является началом координат, а лучи AB и AD — положительными полуосями x и y соответственно. Тогда вершины прямоугольника будут иметь следующие координаты: $A(0,0)$; $B(a,0)$; $C(a,b)$; $D(0,b)$. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка плоскости. Имеем:

$$MA^2=x^2+y^2;\quad MB^2=(x-a)^2+y^2;$$
$$MC^2=(x-a)^2+(y-b)^2;\quad MD^2=x^2+(y-b)^2.$$

Тогда

$$MA^2+MC^2=x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2=MB^2+MD^2,$$

что и требовалось доказать.

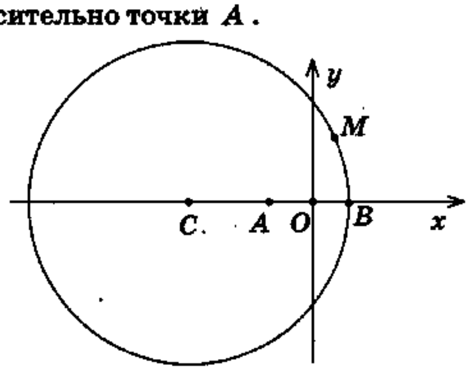


13. Пусть a — длина отрезка AB. Выберем систему координат Oxy таким образом, чтобы точка A имела координаты $A\left(-\frac{a}{2},0\right)$, а точка B имела координаты $B\left(\frac{a}{2},0\right)$. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка плоскости. Имеем:

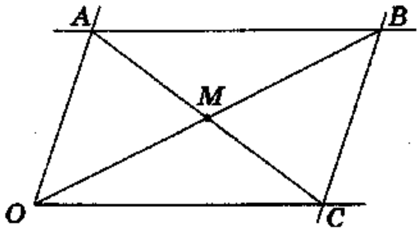
$$2AM^2-BM^2=2AB^2 \Leftrightarrow 2\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+2y^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-y^2=2a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+3ax+\frac{a^2}{4}+y^2=2a^2 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3a}{2}\right)^2+y^2=4a^2.$$

Таким образом, искомое геометрическое место точек представляет собой окружность радиуса $2a$ с центром в точке C, симметричной точке B относительно точки A.



14. Пусть O — вершина данного угла, M — данная точка. На луче OM возьмем точку B такую, что $OM=MB$. Через точку B проведем прямые, параллельные сторонам данного угла. Пусть эти прямые пересекут стороны угла в точках A и C. Прямая AC — искомая. Действительно, $OABC$ — параллелограмм, поэтому диагональ AC делится в точке пересечения с диагональю OB (точке M) пополам. Задача всегда имеет единственное решение.



Тест 2

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	2	4	2	1	2	2	1	2	4	2	4

13. Окружность без одной точки.

Тест 3

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	2	1	4	3	3	1	3	3	4	2	3

13. Окружность радиуса kR, где R — радиус данной окружности.

Тест 4

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	1	3	3	4	3	3	3	2	3	3	4

13. Окружность с центром в середине отрезка AB и радиусом, равным $\sqrt{a^2-c^2}$.

Тест 5

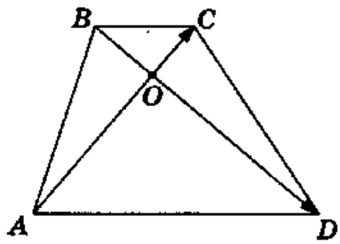
№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	4	2	1	2	1	4	4	3	3	1	1

13. Две прямые, перпендикулярные к прямой AB и находящиеся на расстоянии $\frac{a^2}{c}$ от середины отрезка AB.

Тест 6

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	3	4	2	1	2	2	2	1	4	4	3

1. Пусть O — точка пересечения диагоналей данной трапеции. Тогда $AO:OC=3:1$, поэтому $\overline{AO}=\frac{3}{4}\overline{AC}$. Аналогично, $\overline{BO}=\frac{1}{4}\overline{BD}$. Следовательно, $\overline{AB}=\overline{AO}-\overline{BO}=\frac{3}{4}\overline{AC}-\frac{1}{4}\overline{BD}=\frac{3}{4}\bar{a}-\frac{1}{4}\bar{b}$.



2. Координаты точки M вычисляем как полусуммы соответствующих координат точек B и C, поэтому $M(3,-1)$. Тогда $AM=\sqrt{(0-3)^2+(1+1)^2}=\sqrt{13}$.

3. Пусть $O(x_0,x_0+2)$ — центр искомой окружности, R — ее радиус. Тогда уравнение этой окружности будет иметь следующий вид: $(x-x_0)^2+(y-x_0-2)^2=R^2$. Подставив в это уравнение координаты точек A и B, получим систему

$$\begin{cases}(3-x_0)^2+(x_0+2)^2=R^2\\(1+x_0)^2+x_0^2=R^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_0^2-2x_0+13=R^2\\2x_0^2+2x_0+1=R^2.\end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения этой системы первое, находим, что $x_0=3$. Следовательно, $R=5$, и уравнение окружности будет иметь вид $(x-3)^2+(y-5)^2=25$.

4. Пусть точка $M(x,y)$ принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB. Тогда $MA=MB$. Имеем:

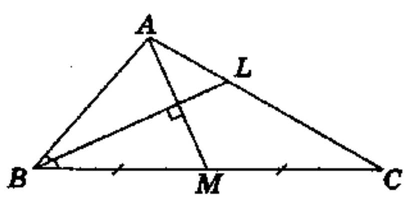
$$(x+7)^2+(y-5)^2=(x-3)^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow 14x+49-10y+25=-6x+9+2y+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 20x-12y+64=0 \Leftrightarrow 5x-3y+16=0.$$

Последнее уравнение и есть уравнение искомого серединного перпендикуляра.

5. В треугольнике ABM биссектриса совпадает с высотой, поэтому этот треугольник — равнобедренный ($AB=BM$). Поэтому $BC=2AB$. Пусть $AB=x$, тогда $BC=2x$. Применив к треугольнику ABC теорему косинусов, находим, что

$$4x^2=x^2+1-2\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 3x^2-x-1=0.$$

Положительный корень этого уравнения равен $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$.



6. Имеем:

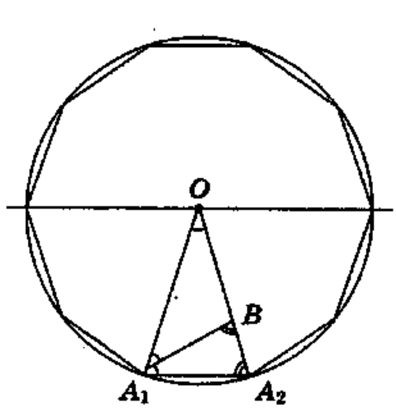
$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=49+7\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=28.$$

7. Рассмотрим треугольник A_1OA_2, где O — центр окружности, а A_1 и A_2 — соседние вершины данного десятиугольника. В этом треугольнике проведем биссектрису A_1B. Тогда

$\angle A_1OA_2=\angle OA_1B=\angle BA_1A_2=36^\circ$,

$\angle A_1BA_2=\angle A_1A_2B=72^\circ$.

Пусть $A_1A_2=A_1B=OB=x$, тогда $A_2B=1-x$. Треугольники BA_1A_2 и A_1OA_2 подобны (по двум углам). Имеем:

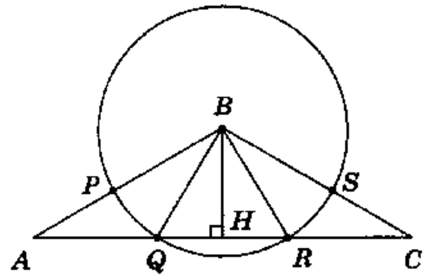


$$\frac{A_2B}{A_1A_2}=\frac{A_1A_2}{OA_1} \Leftrightarrow \frac{1-x}{x}=\frac{x}{1} \Leftrightarrow x^2+x-1=0.$$

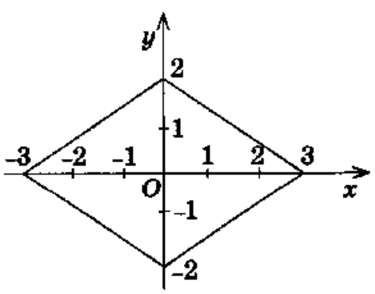
Положительный корень этого уравнения равен $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

8. Пусть окружность, ограничивающая данный круг, пересекает стороны треугольника в точках P, Q, R и S, как показано на рисунке. Пусть также BH — высота треугольника ABC. Так как катет прямоугольного треугольника, лежащий напротив угла в 30°, в два раза меньше гипотенузы, то $BH=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Из прямоугольного треугольника BQH находим, что $\cos\angle QBH=\frac{BH}{BQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\angle QBH=30^\circ$. Аналогично, $\angle RBH=30^\circ$, поэтому $\angle QBR=60^\circ$ и треугольник QBR — равносторонний.

Угол PBQ равен 30°, поэтому площадь сектора PBQ равна $\frac{\pi}{360}\cdot 30=\frac{\pi}{12}$. Площадь сектора RBS также равна $\frac{\pi}{12}$. Площадь треугольника QBR равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$, как площадь равностороннего треугольника со стороной 1. Таким образом, площадь общей части треугольника и круга, состоящей из треугольника QBR и секторов PBQ и RBS, равна $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}$.



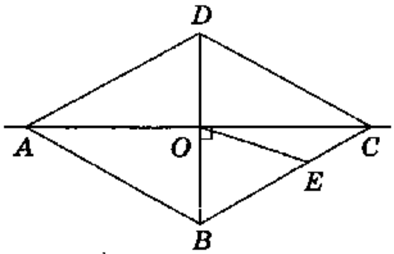
9. Прямая $2x+3y=6$ пересекает оси координат в точках $(0,2)$ и $(3,0)$. Поэтому данный четырехугольник — ромб с вершинами $(0,2)$, $(3,0)$, $(0,-2)$ и $(-3,0)$. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей и равна $S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4=12$.



10. Пусть O — центр ромба $ABCD$. Рассмотрим прямоугольный треугольник BOC, в котором $BC=6$ и $\angle BCO=30^\circ$. Из этого треугольника находим, что $OC=3\sqrt{3}$. Применим теперь к треугольнику EOC теорему косинусов:

$$OE^2=OC^2+CE^2-2OC\cdot CE\cdot\cos\angle ECO=27+4-2\cdot3\sqrt{3}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=13,$$

откуда $OE=\sqrt{13}$.



11. Пусть $AH=h$ — высота треугольника AMN. Углы LAM и ANM равны (как угол между касательной и хордой и вписанный угол, опирающиеся на одну и ту же дугу). Следовательно, треугольник ALM подобен треугольнику NHA. Имеем:

$$\frac{LM}{AH}=\frac{AM}{AN}\iff\frac{l}{h}=\frac{AM}{AN}.$$

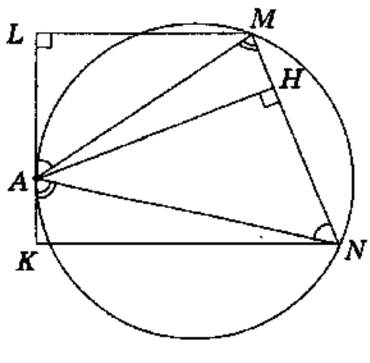
Аналогично, треугольник AKN подобен треугольнику MHA и

$$\frac{KN}{AH}=\frac{AN}{AM}\iff\frac{k}{h}=\frac{AN}{AM}.$$

Перемножив почленно полученные равенства, находим, что

$$\frac{l}{h}\cdot\frac{k}{h}=\frac{AM}{AN}\cdot\frac{AN}{AM}=1,$$

откуда $h=\sqrt{kl}$ и $S_{\Delta AMN}=\frac{a\sqrt{kl}}{2}$.



12. Проведем через точку C прямую, параллельную прямой AB. Пусть эта прямая пересекает прямую XZ в точке K. Тогда треугольник AXZ подобен треугольнику CKZ (по двум углам). Имеем:

$$\frac{AX}{CK}=\frac{ZA}{CZ} \Leftrightarrow CK=\frac{AX\cdot CZ}{ZA}.$$

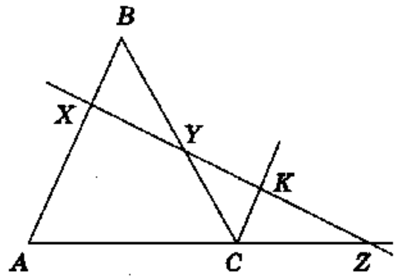
Аналогично, подобны треугольники XBY и KCY. Из этого подобия получаем соотношение:

$$\frac{XB}{CK}=\frac{BY}{YC} \Leftrightarrow CK=\frac{XB\cdot YC}{BY}.$$

Приравнивая полученные выражения, находим, что

$$\frac{AX\cdot CZ}{ZA}=\frac{XB\cdot YC}{BY} \Leftrightarrow \frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=1,$$

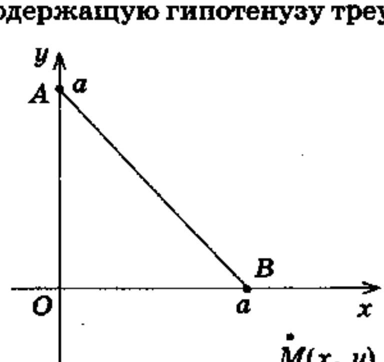
что и требовалось доказать.



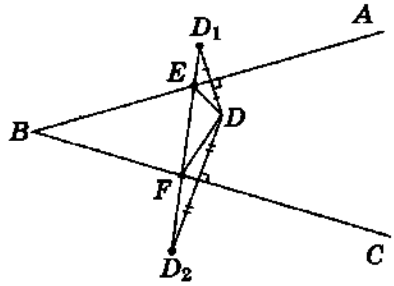
13. Пусть a — длина катета данного прямоугольного треугольника. Выберем систему координат таким образом, чтобы вершина прямого угла имела координаты $(0,0)$, а вершины острых углов — координаты $(a,0)$ и $(0,a)$. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка плоскости. Согласно условию задачи имеем:

$$(x-a)^2+y^2+x^2+(y-a)^2=2x^2+2y^2 \Leftarrow x+y=a.$$

Таким образом, искомое геометрическое место точек представляет собой прямую, содержащую гипотенузу треугольника.



14. Пусть D_1 — точка, симметричная точке D относительно прямой AB, а D_2 — точка, симметричная точке D относительно прямой BC. Тогда для любой точки E на луче BA будет выполнено равенство $DE = D_1E$, а для любой точки F на луче BC — равенство $DF = D_2F$. Поэтому периметр треугольника DEF будет равен длине ломаной D_1EFD_2. Следовательно, такой периметр будет наименьшим, если точки E и F лежат на отрезке D_1D_2, то есть являются точками пересечения прямой D_1D_2 со сторонами угла ABC. Задача всегда имеет единственное решение.



Тест 7

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	1	1	3	3	3	1	4	4	2	1	2

13. Окружность, вписанная в данный треугольник.

Тест 8

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	2	3	2	2	4	4	3	2	2	4	4

13. Окружность с центром в вершине параллелограмма $ABCD$ и радиусом, равным $\sqrt{AC^2 + BC^2 - AB^2}$.

Тест 9

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	4	2	1	1	2	2	1	1	3	3	4

13. Окружность с центром в точке пересечения медиан треугольника ABC и радиусом, равным $\frac{1}{3}\sqrt{3a^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2)}$.

Тест 10

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	2	3	3	4	1	1	3	3	1	2	4

13. Две прямые, содержащие середины противоположных сторон этого прямоугольника.

Тест 11

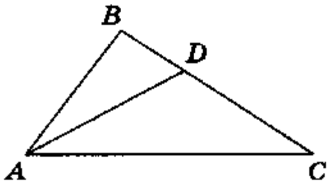
№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	1	2	2	2	3	2	2	4	5	1	1

1. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда коэффициенты в разложении этих векторов по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны. Имеем:

$$\frac{1}{x}=\frac{x+2}{3}\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow x=-3 \text{ или } x=1.$$

2. Найдем сначала длины сторон AB и AC. Имеем: $AB=\sqrt{(7-4)^2+(5-1)^2}=5$ и $AC=\sqrt{(-4-4)^2+(7-1)^2}=10$. Так как биссектриса внутреннего угла треугольника делит его противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то $BD:DC=1:2$. Поэтому $\overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{BC}$. Так как $\overline{BC}=\{-11,2\}$, то $\overline{BD}=\left\{-\frac{11}{3},\frac{2}{3}\right\}$ и $D=\left(7-\frac{11}{3},5+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{10}{3},\frac{17}{3}\right)$.

Следовательно, $AD=\sqrt{\left(\frac{10}{3}-4\right)^2+\left(\frac{17}{3}-1\right)^2}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$.



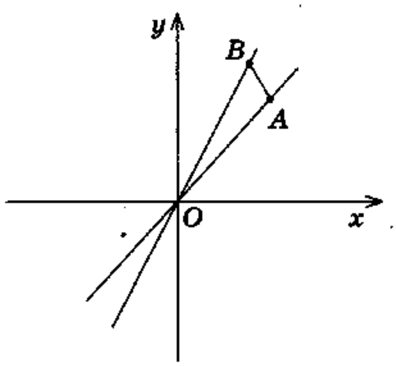
3. Для нахождения общих точек двух данных окружностей решим систему уравнений:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=4,\\ x^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x+y^2-4y=-1,\\ x^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=1,\\ x^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1-2y,\\ (1-2y)^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1-2y,\\ 5y^2-4y=0\end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(1,0);\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right).$$

Расстояние между полученными точками находим по формуле $\sqrt{\left(1+\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{4}{\sqrt{5}}$.

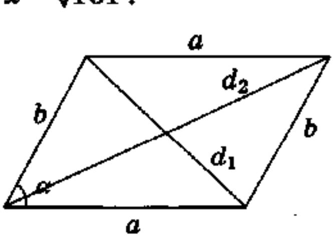
4. Так как угловой коэффициент прямой есть тангенс угла наклона этой прямой к положительному направлению оси Ox, то прямая OA наклонена к оси Ox под углом 45°, а прямая OB — под углом 60°. Поэтому угол AOB равен 15°.



5. Докажем, что сумма квадратов длин всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов длин его диагоналей. Обозначим стороны параллелограмма через a и b, острый угол между ними — через α, диагонали — через d_1 и d_2 $(d_1<d_2)$. Применив два раза теорему косинусов, получим, что

$$d_1^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha;$$
$$d_2^2=a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\alpha)=a^2+b^2+2ab\cos\alpha.$$

Сложив получившиеся равенства, находим, что $d_1^2+d_2^2=2a^2+2b^2$. Согласно доказанному имеем: $72+98=9+x^2$, где x — искомая диагональ, откуда $x=\sqrt{161}$.



6. Пусть $\overrightarrow{FA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{FB}=\vec{b}$, тогда $\overrightarrow{FC}=-\vec{a}$ и $\overrightarrow{FD}=-4\vec{b}$. Кроме того, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=120^\circ$. Имеем:

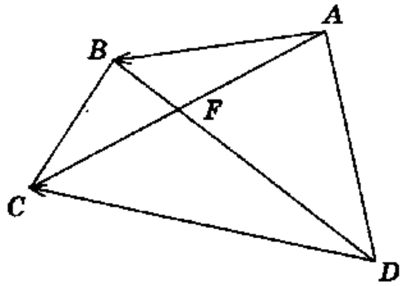
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(4\vec{b}-\vec{a})=4|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}=8-5\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=13,$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{|\vec{b}-\vec{a}|^2}=\sqrt{|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{5-2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b})}=\sqrt{7},$$

$$|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{|4\vec{b}-\vec{a}|^2}=\sqrt{16|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{20-8\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b})}=2\sqrt{7}.$$

Таким образом,

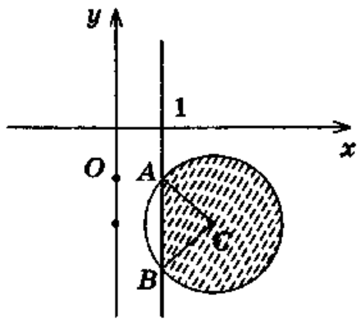
$$\cos\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{DC}|}=\frac{13}{14}.$$



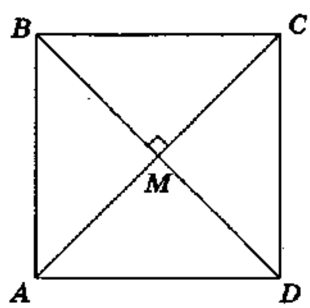
7. Число $\sin\left(\frac{180}{2013}\right)^\circ$ равно половине длины стороны правильного дветысячитринадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса 1. Поэтому значение выражения $2013\cdot\sin\left(\frac{180}{2013}\right)^\circ$ равно полупериметру этого многоугольника. Поскольку данный полупериметр примерно равен половине длины описанной окружности, то есть π, то ближайшее к нему из рассмотренных чисел равно 3.

8. После выделения полных квадратов в первом неравенстве системы получаем, что $(x-2)^2+(y+2)^2\le 2$. Это соотношение задает на координатной плоскости круг, ограниченный окружностью с центром в точке $C(2,-2)$ радиуса $\sqrt{2}$. Прямая $x=1$ пересекает эту окружность в точках $A(1,-1)$ и $B(1,-3)$. Таким образом, искомое множество точек состоит из треугольника ACB и кругового сектора CAB, содержащего большую из дуг AB окружности. Угол ACB — прямой, поэтому $S_{\Delta ACB}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=1$, а площадь сектора

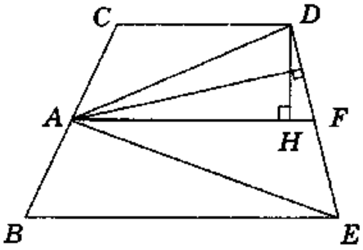
ACB равна $S=\frac{\pi\cdot(\sqrt{2})^2}{360}\cdot 270=\frac{3\pi}{2}$. Таким образом, площадь искомой фигуры равна $1+\frac{3\pi}{2}$.



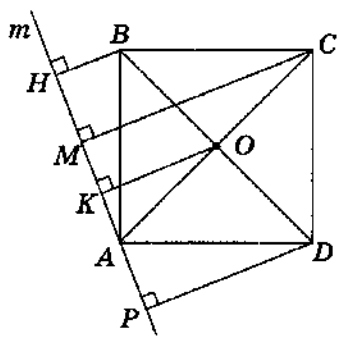
9. Так как треугольники AMB и BMC могут быть совмещены поворотом вокруг точки M на угол 90°, то $MA=MB=MC$ и $MA\perp MB$. Следовательно, диагонали данной трапеции перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам. Но тогда будут параллельны прямые AB и CD (по признаку параллелограмма), что противоречит определению трапеции. Это означает, что такой трапеции не существует.



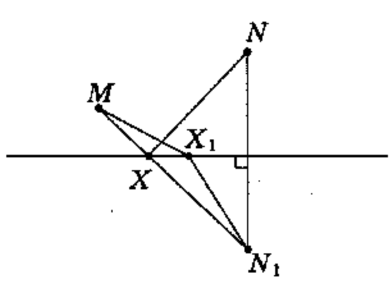
10. Пусть A — середина стороны BC, а F — середина стороны DE трапеции $BCDE$. Докажем, что площадь треугольника ADE в два раза меньше площади трапеции $BCDE$. Опустим высоту DH в треугольнике ADF. Тогда $S_{\Delta ADF}=\frac{1}{2}AF\cdot DH=\frac{1}{2}AF\cdot\frac{h}{2}$, где h — высота трапеции. Но площади треугольников ADF и AFE равны, поэтому $S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}AF\cdot h$, что равно половине площади трапеции $BCDE$ (так как AF — средняя линия трапеции). Таким образом, площадь трапеции $BCDE$ равна удвоенной площади треугольника ADE и равна bd.



11. Пусть O — центр квадрата $ABCD$; пусть также BH, CM, DP и OK — перпендикуляры, опущенные соответственно из точек B, C, D и O на прямую m. Тогда OK — средняя линия трапеции $BHPD$, поэтому $OK = \frac{b+d}{2}$. С другой стороны, OK — средняя линия треугольника ACM, откуда следует, что $CM = 2OK = b+d$.



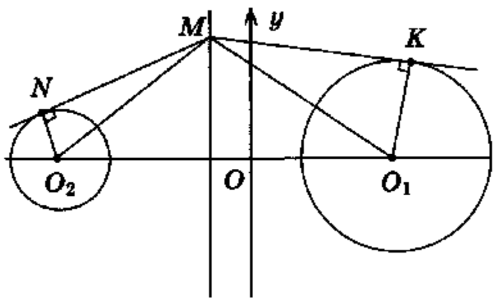
12. Пусть N_1 — точка, симметричная точке N относительно прямой a. Тогда для любой точки X этой прямой справедливо равенство $XN = XN_1$, поэтому $MX + XN = MX + XN_1$. Такая сумма будет наименьшей (и равной длине отрезка MN_1), если точка X лежит на отрезке MN_1; для любой другой точки X_1 будет выполнено неравенство $MX_1 + X_1N_1 > MN_1$ (согласно неравенству треугольника).



13. Запишем уравнения окружностей следующим образом: $(x-3)^2+y^2=4$ и $(x+4)^2+y^2=1$. Таким образом, первая окружность имеет центр в точке $O_1(3,0)$ и радиус $R_1=2$, вторая — центр $O_2(-4,0)$ и радиус $R_2=1$. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка плоскости, MK — касательная к первой окружности (K — точка касания), MN — касательная ко второй окружности (N — точка касания). Длину отрезка MK найдем из прямоугольного треугольника O_1MK: $MK^2=MO_1^2-O_1K^2=(x-3)^2+y^2-4$. Аналогично, $MN^2=MO_2^2-O_2N^2=(x+4)^2+y^2-1$. Так как $MK=MN$, имеем:

$$(x-3)^2+y^2-4=(x+4)^2+y^2-1 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{7}.$$

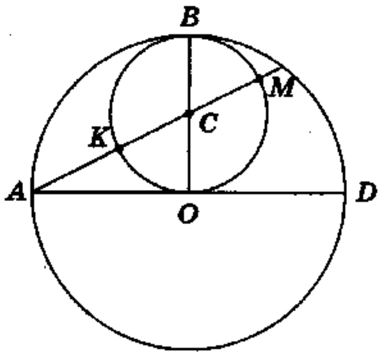
Таким образом, искомое геометрическое место точек есть прямая $x=-\frac{5}{7}$.



14. Пусть радиус данной окружности равен 1. Мы знаем (решение задачи 7 теста 6), что сторона правильного десятиугольника, вписанного в эту окружность, равна $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Построить отрезок данной длины можно следующим образом. Проведем в окружности произвольный диаметр AD (O — центр окружности). Построим окружность радиуса $1/2$ с центром в точке C, которая касается диаметра AD в точке O, а исходной окружности — в точке B. Пусть прямая AC пересекает меньшую окружность в точках K и M (K между A и M). Тогда AK — искомый отрезок. Действительно, по теореме о касательной и секущей, проведенными из одной точки, имеем:

$$AO^2=AK\cdot AM \Leftrightarrow 1=AK(AK+1) \Leftrightarrow AK^2+AK-1=0 \Leftrightarrow AK=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

то есть длина отрезка AK равна длине стороны правильного десятиугольника, вписанного в большую окружность.



Тест 12

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	2	3	2	2	1	1	2	3	4	2	3

13. Окружность $x^2+y^2=5$.

Тест 13

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	2	1	4	3	4	2	3	1	2	2	2

13. Четыре прямые: $y=\pm 2x$, $y=\pm\frac{1}{2}x$; в системе координат, осями которой служат данные прямые.

Тест 14

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	3	1	3	4	2	3	3	4	1	3	4

13. Контур квадрата, образованного прямыми $x+y\pm 3=0$, $x-y\pm 3=0$.

Тест 15

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	3	2	4	1	3	4	4	2	3	4	1

14. Прямые, содержащие диагонали квадрата, и описанная около него окружность.

Справочное издание

Садовничий Юрий Викторович

Промежуточное тестирование

Геометрия

9 класс

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. АЕ51. Н 16582 от 08.04.2014 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Н. Н. Яковлева, О. Ю. Казанаева*
Дизайн обложки *А. И. Баранюк*
Компьютерная верстка *И. Ю. Иванова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «Красногорская типография»
143405, Московская обл., г. Красногорск, Коммунальный кв-л, д. 2.
www.ktprint.ru